Einstein-Hilbert-Wirkung

Florian Jung
Fachbereich Physik, Universität Mainz

Vortrag im Seminar
„Lösungen der Einstein'schen Gleichungen und Kosmologie"
14. Juli 2003

Zusammenfassung

Ziel des Vortrags ist die Herleitung der Einstein'schen Gleichungen aus einem Variationsprinzip. Durch diesen Zugang wird die Existenz von Erhaltungssätzen auf Grundlage des Noether-Theorems gesichert. Zuerst erklären wir invariante Integrale von Funktionen auf Mannigfaltigkeiten. In diesem Zusammenhang tritt das invariante Volumenelement auf. Als Anwendung davon beweisen wird den Satz von Gauß. Im Folgenden werden zuerst die Feldgleichungen im Vakuum und danach die Materiegleichungen aus einem Variationsprinzip hergeleitet. Als Nebenprodukt erhält man eine allgemeine Definition des Energie-Impuls-Tensors in einer Lagrange'schen Feldtheorie. Abschließend werden die bis dahin erhaltenen Ergebnisse verwendet, um die Einstein-Gleichungen für das gekoppelte System aus Feld und Materie aufzustellen.

1. Die invariante Volumenform und der Satz von Gauß

Eine lokale Wirkung lässt sich allgemein als Integral über eine Lagrangedichte $\mathscr{L}$ schreiben:

$$S = \int_M \mathscr{L}$$

Integrale von Funktionen f über eine n-dimensionale, orientierbare Mannigfaltigkeit M definiert man mittels

$$\int_M f := \int_M f\, \omega_M \ ,$$

wobei ω_M eine nichtverschwindende n-Form auf M ist. Ist zusätzlich eine Metrik auf M gegeben, dann ist die natürliche *Volumenform*

$$\omega_M = \sqrt{|g|}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \ , \tag{1}$$

wobei $g := \det(g_{ij})$ definiert wurde. Unter einem Koordinatenwechsel $\varphi : x^i \to \bar{x}^i$ transformiert sich die Metrik als Tensor gemäß:

$$g_{ij} = \frac{\partial \bar{x}^a}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^b}{\partial x^j}\, \bar{g}_{ab} \circ \varphi \ .$$

Die Volumenform wird damit zu:

$$\begin{aligned} \varphi^* \omega_M &= \left| \det\left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial x} \right) \right| \sqrt{|\bar{g}|} \left| \det\left(\frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right) \right| d\bar{x}^1 \wedge \ldots \wedge d\bar{x}^n \\ &= \sqrt{|\bar{g}|}\, d\bar{x}^1 \wedge \ldots \wedge d\bar{x}^n \ . \end{aligned}$$

Durch diese spezielle Wahl von ω_M ist das Integral also unabhängig von der Wahl der Koordinaten geworden. Man spricht deshalb auch von der *invarianten Volumenform.* Speziell für den Fall $n = 4$ ergibt sich:

$$\omega_M = \sqrt{-g}\, d^4 x \ . \tag{2}$$

Ein sehr wichtiges und tiefgehendes Resultat der Vektoranalysis auf Mannigfaltigkeiten ist der Satz von Stokes[1]:

Satz von Stokes: *Sei M eine orientierbare, n-dimensionale Mannigfaltigkeit und $K \subset M$ eine n-dimensionale kompakte Teilmenge mit glattem Rand ∂K. Dann gilt für alle $(n-1)$-Formen ω:*

$$\int_K d\omega = \int_{\partial K} \omega \ . \tag{3}$$

Als Beispiel für die Anwendung des eben definierten Volumenelements kann man daraus den *Satz von Gauß* herleiten. Sei dazu ω_K das invariante Volumenelement auf K und $X \in \mathfrak{X}(K)$ ein Vektorfeld. Die Divergenz von X ist definiert als:

$$L_X \omega_K =: (\operatorname{div} X)\, \omega_K \ .$$

Da $L_X = d \circ i_X + i_X \circ d$, ergibt sich:

$$L_X \omega_K = d(i_X \omega_K) + i_X(d\omega_K) = d(i_X \omega_K) \ .$$

Verwendet man (3), so erhält man eine erste Version des Gauß'schen Satzes:

$$\int_K (\operatorname{div} X)\, \omega_K = \int_K d(i_X \omega_K) = \int_{\partial K} i_X \omega_K \ . \tag{4}$$

Wähle nun eine Orthonormalbasis $\{w_1, \ldots, w_{n-1}\}$ von $\mathrm{T}_p(\partial K)$ und mit n sei der nach außen gerichtete Einheitsnormalenvektor auf $\mathrm{T}_p(\partial K)$ bezeichnet. Dann ist durch $\{n, w_1, \ldots, w_{n-1}\}$ eine Orthonormalbasis von $\mathrm{T}_p K$ definiert. X lässt sich damit schreiben als $X = \langle X | n \rangle n + Y$, wobei $Y \in \mathrm{T}_p(\partial K)$ ist. Damit gilt:

$$\begin{aligned} (i_X \omega_K)(w_1, \ldots, w_{n-1}) &= \omega_K(X, w_1, \ldots w_{n-1}) \\ &= \langle X | n \rangle\, \omega_K(n, w_1, \ldots, w_{n-1}) = \langle X | n \rangle\, \omega_{\partial K}(w_1, \ldots, w_{n-1}) \ , \end{aligned}$$

wobei $\omega_{\partial K}$ die durch ω_K induzierte Volumenform auf ∂K ist. Definiert man nun noch das Einheitsnormalenfeld $N \in \mathfrak{X}(M)$, durch die Vektoren n auf den Tangentialräumen, ergibt sich die bekannte Version des *Gauß'schen Satzes*:

$$\int_K (\operatorname{div} X)\, \omega_K = \int_{\partial K} \langle X | N \rangle\, \omega_{\partial K} \ . \tag{5}$$

2. Ableitung der Determinante

Bei der Herleitung der Einstein'schen Gleichungen variiert man das Wirkungsintegral nach der Metrik. In diesem Zusammenhang werden wir auch die Ableitung der Determinante der Metrik g benötigen, die wir nun berechnen wollen.

Die Determinante einer $n \times n$-Matrix M ist definiert als:

$$\det M := \varepsilon^{i_1 \ldots i_n}\, M_{i_1 1} \cdots M_{i_n n} \ ,$$

wobei $\varepsilon^{i_1 \ldots i_n}$ total antisymmetrisch und $\varepsilon^{1 \ldots n} = 1$ ist. Leitet man dies nach M_{ij} ab, so erhält man:

$$\frac{\partial \det M}{\partial M_{ij}} = \varepsilon^{i_1 \ldots i_{j-1}\, i\, i_{j+1} \ldots i_n} M_{i_1 1} \cdots \widehat{M_{ij}} \cdots M_{i_n n} \ .$$

[1]Der Satz von Stokes stellt eine Verallgemeinerung des Fundamentalsatzes der 1-dimensionalen Integralrechnung dar: Ist $G = [a; b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, dann gilt formal:

$$\int_G f'(x)\, dx = \int_{\partial G} f(x) = f(b) - f(a) \ .$$

Multipliziert man diesen Ausdruck mit M_{il} und summiert über i, bekommt man für $j = l$ die Determinante wieder zurück, ansonsten ergibt sich Null, wegen der totalen Antisymmetrie von ε:

$$\frac{\partial \det M}{\partial M_{ij}} M_{il} = \det(M)\, \delta^j_l \ .$$

Multipliziert man nun noch von rechts mit der inversen Matrix M^{lk}, so ergibt sich die Ableitung der Determinante zu:

$$\frac{\partial \det M}{\partial M_{ij}} = \det(M) M^{ji} \ . \tag{6}$$

Speziell für die Variation der Metrik, wie sie im Volumenelement vorkommt, erhält man mit der Definition $g := \det(g_{ij})$ nach der Kettenregel die Formel

$$\delta(\sqrt{-g}\,) = \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial g_{ij}} \delta g_{ij} = \tfrac{1}{2}\sqrt{-g}\, g^{ab}\, \delta g_{ab} \ . \tag{7}$$

Die Variation der Volumenform der Volumenform ist demnach:

$$\delta\omega_M = \tfrac{1}{2} g^{ab} \delta g_{ab}\, \omega_M \ . \tag{8}$$

Ansonsten benötigen wir noch die Variation der inversen Metrik. Diese erhält man, indem man die definierende Relation der Inversen $g^{ia} g_{ab} = \delta^i_b$ variiert. Es ergibt sich $0 = \delta g^{ia}\, g_{ab} + g^{ia} \delta g_{ab}$ und daraus:

$$\delta g^{ij} = -g^{ia} g^{jb} \delta g_{ab} \ . \tag{9}$$

3. Variationsprinzip für die Felder

Wir zeigen nun, wie sich die Einstein-Gleichungen aus einem Variationsprinzip herleiten lassen. Dazu wollen wir uns zunächst auf das freie Gravitationsfeld, d. h. die Vakuum-Feldgleichungen, beschränken.

Satz: *Die Einstein-Hilbert-Wirkung für die Felder ist gegeben als*

$$S_{\mathrm{F}}[g] = \int \star R = \int R\, \omega_K \ , \tag{10}$$

wobei R der Krümmungsskalar und ω_K die invariante Volumenform ist. Das Hamilton'schen Variationsprinzip für die Vakuum-Feldgleichungen lautet dann:

$$\delta S_{\mathrm{F}}[g] = \delta \int_K R\, \omega_K \stackrel{!}{=} 0 \ . \tag{11}$$

Hierbei ist $K \subset M$ eine kompakte Teilmenge mit glattem Rand ∂K, auf dem die Variation der Metrik verschwinden soll ($\delta g_{ij}|_{\partial K} \equiv 0$).

Beweis: Der Krümmungsskalar ist nach Definition $R = g^{ij} R_{ij}$, die Volumenform ist nach (2) durch $\omega_K = \sqrt{-g}\, d^4x$ gegeben. Damit gilt:

$$\begin{aligned} \delta \int_K R\, \omega_K &= \delta \int_K R_{ij} g^{ij} \sqrt{-g}\, d^4x \\ &= \underbrace{\int_K \delta R_{ij} g^{ij} \sqrt{-g}\, d^4x}_{=:I_1} + \underbrace{\int_K R_{ij} \delta(g^{ij} \sqrt{-g})\, d^4x}_{=:I_2} \ . \end{aligned} \tag{12}$$

Wir betrachten zuerst die Variation von R_{ij}. Der Ricci-Tensor ist:

$$R_{ij} = R^l{}_{ilj} = \left(\partial_l \Gamma^l_{ji} + \Gamma^l_{ln} \Gamma^n_{ji}\right) - \left(\partial_j \Gamma^l_{li} + \Gamma^l_{jn} \Gamma^n_{li}\right) \ .$$

Wählt man im Punkt p Normalkoordinaten, dann vereinfacht sich dies zu:

$$R_{ij} = \partial_l \Gamma^l_{ji} - \partial_j \Gamma^l_{li} \ .$$

Da die Variation mit partiellen Ableitungen vertauscht, hat man in p:

$$\delta R_{ij} = \delta\big(\partial_l \Gamma^l_{ji} - \partial_j \Gamma^l_{li}\big) = \partial_l(\delta\Gamma^l_{ji}) - \partial_j(\delta\Gamma^l_{li})$$

und daher

$$g^{ij}\delta R_{ij} = g^{ij}\partial_l(\delta\Gamma^l_{ji}) - g^{ij}\partial_j(\delta\Gamma^l_{li}) \ . \qquad (*)$$

Die Christoffelsymbole transformieren sich gemäß

$$\bar\Gamma^k_{ij} = \left(\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^a}\frac{\partial x^b}{\partial \bar x^i}\frac{\partial x^c}{\partial \bar x^j}\right)\Gamma^a_{bc} + \left(\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^d}\frac{\partial^2 x^d}{\partial \bar x^i \partial \bar x^j}\right) .$$

Für die Variationen $\delta\Gamma$ der Christoffelsymbole bedeutet dies:

$$\delta\bar\Gamma^k_{ij} = \left(\frac{\partial \bar x^k}{\partial x^a}\frac{\partial x^b}{\partial \bar x^i}\frac{\partial x^c}{\partial \bar x^j}\right)\delta\Gamma^a_{bc} \ ,$$

da die Terme in Klammern unabhängig von g_{ij} sind. Die Variationen der Christoffelsymbole sind also Tensoren. Definiert man nun:

$$w^a := g^{ij}\delta\Gamma^a_{ji} - \delta\Gamma^l_{li} g^{ia} \ ,$$

dann ist w ein Vektorfeld, da die Kommutatoren von Vektorfeldern wieder Vektorfelder sind. Da in Normalkoordinaten $\partial_k g_{ij} = 0$ gilt, erhält man die Divergenz von w zu:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(w) = {w^a}_{;a} &= g^{ij}\partial_a(\delta\Gamma^a_{ji}) - g^{ia}\partial_a(\delta\Gamma^l_{li})\\ &= g^{ij}\partial_l(\delta\Gamma^l_{ji}) - g^{ij}\partial_j(\delta\Gamma^l_{li})\\ &\overset{(*)}{=} g^{ij}\delta R_{ij} \ .\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für das erste Integral in (12) mit dem Gauß'schen Satz (5):

$$I_1 = \int_K \operatorname{div}(w)\,\omega_K = \int_{\partial K}\langle w|n\rangle\,\omega_{\partial K} = 0 \ , \qquad (13)$$

da die Variationen $\delta\Gamma$ nach Vorraussetzung auf ∂K verschwinden sollen.

Wir betrachten nun das zweite Integral: Aus Abschnitt 2, Gleichung (7) und (9), wissen wir:

$$\delta\big(\sqrt{-g}\,\big) = \tfrac{1}{2}\sqrt{-g}\,g^{ab}\delta g_{ab} \ , \quad \delta g^{ij} = -g^{ia}g^{jb}\delta g_{ab} \ . \qquad (**)$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}\delta\big(g^{ij}\sqrt{-g}\,\big) &= \delta g^{ij}\sqrt{-g} + g^{ij}\delta\big(\sqrt{-g}\,\big)\\ &\overset{(**)}{=} -g^{ia}g^{jb}\delta g_{ab}\sqrt{-g} + g^{ij}\tfrac{1}{2}\sqrt{-g}\,g^{ab}\delta g_{ab}\\ &= \big(\tfrac{1}{2}g^{ij}g^{ab} - g^{ia}g^{jb}\big)\delta g_{ab}\sqrt{-g} \ .\end{aligned}$$

Für zweite Integral aus (12) erhält man also:

$$\begin{aligned}I_2 &= \int_K R_{ij}\big(\tfrac{1}{2}g^{ij}g^{ab} - g^{ia}g^{jb}\big)\delta g_{ab}\,\omega_K\\ &= -\int_K \big(R^{ab} - \tfrac{1}{2}g^{ab}R\big)\delta g_{ab}\,\omega_K = -\int_K G^{ab}\delta g_{ab}\,\omega_K \ . \qquad (14)\end{aligned}$$

Verwendet man nun die beiden Resultate (13) und (14) und fordert $\delta S_{\mathrm{F}}[g] = 0$, so ergibt sich:

$$0 \overset{!}{=} \delta S_{\mathrm{F}}[g] = -\int_K G^{ab}\delta g_{ab}\,\omega_K \ .$$

Da diese Gleichung für *beliebige* Variationen δg_{ab} der Metrik gelten soll, folgen daraus die Vakuum-Feldgleichungen:

$$G^{ab} = 0 \ . \qquad (15)$$

4. Energie-Impuls-Tensor und Materiegleichungen

Wir kommen nun zu den Einstein-Gleichungen in Anwesenheit von Materie, die durch verschiedene Tensorfelder ψ_A mit $A = 1, \ldots, N$ beschrieben werden kann (Spinorfelder werden hier nicht berücksichtigt). Kennt man die Lagrangedichte der Materie $\mathscr{L}_\mathrm{M}$ lokal ohne Gravitation im flachen Raum, so bekommt man daraus nach dem Äquivalenzprinzip die Lagrangedichte in Anwesenheit von Gravitationsfeldern, indem man η_{ij} durch g_{ij} und partielle durch kovariante Ableitungen ersetzt:

$$\eta_{ij} \to g_{ij} \;, \quad \partial_i \to D_i \;.$$

Die Lagrangedichte ist dann von der Form

$$\mathscr{L}_\mathrm{M} = \mathscr{L}_\mathrm{M}(\psi_A, D\psi_A, g) \;.$$

Die Bewegungsgleichungen für die Felder erhält man, indem man das Wirkungsintegral über $\mathscr{L}_\mathrm{M}$ nach den Feldern ψ_A variiert und dann Null setzt. Es ergeben sich die bekannten Euler-Lagrange-Gleichungen (allerdings mit kovarianter Ableitung):

$$\frac{\partial \mathscr{L}_\mathrm{M}}{\partial \psi_A} - D_i \frac{\partial \mathscr{L}_\mathrm{M}}{\partial (D_i \psi_A)} = 0 \;. \tag{16}$$

Einen Ausdruck für den Energie-Impuls-Tensor bekommt man durch Variation nach der Metrik. Wie oben fordert man

$$\delta \int_K \mathscr{L}_\mathrm{M}\, \omega_K \stackrel{!}{=} 0 \;.$$

Die Lagrangedichte hängt sowohl explizit von der Metrik ab, als auch implizit durch die kovarianten Ableitungen der Felder. Die Felder selbst werden dagegen nicht variiert, das bedeutet $\delta\psi_A = 0$. Es gilt also:

$$\delta \int_K \mathscr{L}_\mathrm{M}\, \omega_K = \int_K \left\{ \left[\frac{\partial \mathscr{L}_\mathrm{M}}{\partial (D_i \psi_A)} \delta(D_i \psi_A) + \frac{\partial \mathscr{L}_\mathrm{M}}{\partial g_{ij}} \delta g_{ij} \right] \omega_K + \mathscr{L}_\mathrm{M} \delta\omega_K \right\} \;.$$

Aus Abschnitt 2, Gleichung (8) kennen wir schon die Variation des Volumenelements im letzten Term als $\delta\omega_K = \frac{1}{2} g^{ij} \delta g_{ij}\, \omega_K$. Es bleibt also der erste Term zu untersuchen.

Wie schon erwähnt, verschindet die Variation der kovarianten Ableitung der Felder $\delta(D_i\psi)$ nicht, da die Variation der Christoffelsymbole nicht verschwindet. In Normalkoordinaten gilt:

$$\delta\Gamma^k_{ij} = \tfrac{1}{2} g^{km} \big(\delta g_{jm,i} + \delta g_{im,j} - \delta g_{ij,m} \big) \;.$$

Ersetzt man die partiellen Ableitungen durch kovariante, gilt dies sogar in beliebigen Koordinaten:

$$\delta\Gamma^k_{ij} = \tfrac{1}{2} g^{km} \big(\delta g_{jm;i} + \delta g_{im;j} - \delta g_{ij;m} \big) \;. \tag{17}$$

Die kovariante Ableitung eines Tensorfelds ψ vom Typ (r, s) ist in Koordinaten gegeben durch:

$$\begin{aligned} D_k \psi^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} = \partial_k \psi^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} &+ \Gamma^{i_1}_{ki} \psi^{i i_2 \ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} + \Gamma^{i_2}_{ki} \psi^{i_1 i i_3 \ldots i_r}_{j_1\ldots j_s} + \cdots \\ &+ \Gamma^{j}_{kj_1} \psi^{i_1\ldots i_r}_{j j_2 \ldots j_s} + \Gamma^{j}_{kj_2} \psi^{i_1\ldots i_r}_{j_1 j j_3 \ldots j_s} + \cdots \;. \end{aligned}$$

Der erste Term verschwindet, da die Variation mit partiellen Ableitungen vertauscht und $\delta\psi = 0$ ist. Die restlichen Terme lassen sich mit Hilfe von (17) in Terme von $\delta g_{ij;k}$ umschreiben. Den dadurch entstehenden Ausdruck kann man partiell integrieren, wobei die Oberflächenterme verschwinden, da die Variation der Metrik auf dem Rand ∂K Null ist. Das Wirkungsintegral lässt sich dann in der Form

$$\delta \int_K \mathscr{L}_\mathrm{M}\, \omega_K = -\tfrac{1}{2} \int_K T^{ij} \delta g_{ij}\, \omega_K \tag{18}$$

schreiben, wobei T^{ij} der *Energie-Impuls-Tensor* ist. An der Definition sieht man sofort, dass T^{ij} symmetrisch ist.

Als Beispiel wollen wir das skalare Klein-Gordon-Feld betrachten: Die Lagrangedichte ohne Gravitation ist $\mathscr{L}_{\mathrm{KG}} = -\frac{1}{2}(\partial_a\phi\,\partial^a\phi + m^2\phi^2)$. Nach dem obigen Rezept ergibt sich daraus die Lagrangedichte mit Gravitation zu:

$$\mathscr{L}_{\mathrm{KG}} = -\tfrac{1}{2}\big(D_a\phi D_b\phi\, g^{ab} + m^2\phi^2\big) \ . \tag{19}$$

Die Variation des Wirkungsintegrals ist:

$$\begin{aligned}\delta\int_K \mathscr{L}_{\mathrm{KG}}\,\omega_K &= \int_K \big(\delta\mathscr{L}_{\mathrm{KG}}\,\omega_K + \mathscr{L}_{\mathrm{KG}}\,\delta\omega_K\big)\\ &= \int_K \big(\delta\mathscr{L}_{\mathrm{KG}}\,\omega_K + \tfrac{1}{2}\mathscr{L}_{\mathrm{KG}}g^{ij}\delta g_{ij}\big)\,\omega_K \ , \qquad (*)\end{aligned}$$

wobei wieder Gleichung (8) verwendet wurde. Die Variation von $\mathscr{L}_{\mathrm{KG}}$ ist:

$$\begin{aligned}\delta\mathscr{L}_{\mathrm{KG}} &= \delta\big[-\tfrac{1}{2}\big(D_a\phi D_b\phi\, g^{ab} + m^2\phi^2\big)\big]\\ &= -\tfrac{1}{2}\delta(D_a\phi)D_b\phi\, g^{ab} - \tfrac{1}{2}D_a\phi\,\delta(D_b\phi)\, g^{ab} + \tfrac{1}{2}D_a\phi D_b\phi\, g^{ai}g^{bj}\delta g_{ij} \ .\end{aligned}$$

Die kovariante Ableitung eines Skalars ist gleich der partiellen Ableitung, $D_a\phi = \partial_a\phi$, die ersten beiden Terme verschwinden also. Setzt man das Ergebnis in $(*)$ ein, erhält man:

$$\delta\int_K \mathscr{L}_{\mathrm{KG}}\,\omega_K = -\tfrac{1}{2}\int_K \big\{-D^i\phi D^j\phi + \tfrac{1}{2}g^{ij}(D_a\phi D^a\phi + m^2\phi^2)\big\}\delta g_{ij}\,\omega_K \ .$$

Der Energie-Impuls-Tensor für das skalare Klein-Gordon-Feld ist also:

$$T^{ij}_{\mathrm{KG}} = -D^i\phi D^j\phi + \tfrac{1}{2}g^{ij}(D_a\phi D^a\phi + m^2\phi^2) \ .$$

Als zweites Beispiel schauen wir uns das elektromagnetische Feld an. Die Lagrangedichte ist $\mathscr{L}_{\mathrm{em}} = -\frac{1}{16\pi}F_{ij}F^{ij}$ mit $F_{ij} = A_{j,i} - A_{i,j}$. Wieder nach dem obigen Rezept erhält man:

$$\mathscr{L}_{\mathrm{em}} = -\frac{1}{16\pi}F_{ij}F_{kl}g^{ik}g^{jl} \ , \tag{20}$$

wobei wegen der Symmetrie der Christoffelsymbole $F_{ij} = A_{j;i} - A_{i;j} = A_{j,i} - A_{i,j}$ gilt. Der elektromagnetische Feldtensor ist also unabhängig von der Metrik und seine Variationen nach der Metrik verschwinden. Man erhält also mit der Symmetrie von g^{ij}:

$$\begin{aligned}\delta\int_K \mathscr{L}_{\mathrm{em}}\,\omega_K &= \int_K \big(\delta\mathscr{L}_{\mathrm{em}}\,\omega_K + \mathscr{L}_{\mathrm{em}}\,\delta\omega_K\big)\\ &\overset{(8)}{=} \int_K \big(-\tfrac{1}{8\pi}F_{ij}F_{kl}g^{ik}\delta g^{jl} + \tfrac{1}{2}\mathscr{L}_{\mathrm{em}}g^{ab}\delta g_{ab}\big)\,\omega_K\\ &\overset{(9)}{=} \int_K \big(+\tfrac{1}{8\pi}F_{ij}F_{kl}g^{ik}g^{ja}g^{lb} + \tfrac{1}{2}\mathscr{L}_{\mathrm{em}}g^{ab}\big)\delta g_{ab}\,\omega_K\\ &= \tfrac{1}{8\pi}\int_K \big(F^{ka}F_k{}^b - \tfrac{1}{4}F_{ij}F^{ij}g^{ab}\big)\delta g_{ab}\,\omega_K\end{aligned}$$

Der Energie-Impuls-Tensor für des elektromagnetischen Feldes ist also

$$T^{ab}_{\mathrm{em}} = -\tfrac{1}{4\pi}\big(F^{ka}F_k{}^b - \tfrac{1}{4}F_{ij}F^{ij}g^{ab}\big) \ ,$$

oder nach Herunterziehen der Indizes:

$$T^{(\mathrm{em})}_{ab} = -\tfrac{1}{4\pi}\big(F_{ak}F_{bl}g^{kl} - \tfrac{1}{4}g_{ab}F_{ij}F^{ij}\big) \ . \tag{21}$$

Dies entspricht dem *symmetrischen Energie-Impuls-Tensor*, wie man ihn schon aus der Elektrodynamik kennt.

Wir zeigen nun, dass der Energie-Impuls-Tensor erhalten ist, d. h. dass die kovariante Ableitung $D_j T^{ij}$ verschindet. Dazu betrachten wir eine 4-Form $\Omega[\Psi]$, die ein invariantes Funktional von Tensorfeldern Ψ ist, in dem Sinne, dass $\varphi^*\Omega[\Psi] = \Omega[\varphi^*\Psi]$ gilt, für alle Diffeomorphismen $\varphi \in \mathrm{Diff}(K)$. Sei nun X ein Tensorfeld auf K mit $X|_{\partial K} \equiv 0$ und $\phi_t \in \mathrm{Diff}(K)$ der zugehörige Fluss. Dann ist die Lieableitung von Ω nach X definiert als:

$$L_X\Omega[\Psi] := \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \phi_t^*\Omega[\Psi] = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \Omega[\phi_t^*\Psi] \ .$$

Andererseits wissen wir, dass $L_X = i_X \circ d + d \circ i_X$ ist. Da Ω eine 4-Form und $\dim K = 4$ ist, erhält man $d\Omega = 0$ und deshalb:

$$\int_K L_X\Omega = \int_K d(i_X\Omega) \overset{(3)}{=} \int_{\partial K} i_X\Omega = 0 \ ,$$

wobei im letzten Schritt verwendet wurde, dass Ω multilinear ist und X auf dem Rand ∂K verschwindet. Man erhält also als Ergebnis:

$$\int_K \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \Omega[\phi_t^*\Psi] = 0 \ . \tag{22}$$

Speziell gilt dieses Ergebnis für $\Omega[g] = (\mathscr{L}_{\mathrm{M}}\omega_K)[g]$, da in $\mathscr{L}_{\mathrm{M}}$ alle partiellen Ableitungen durch kovariante ersetzt wurden. Verwendet man nun (18) mit $\delta g_{ij} = (L_X g)_{ij}$, so ergibt sich daraus:

$$-\tfrac{1}{2}\int_K T^{ij}(L_X g)_{ij}\,\omega_K = \int_K \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\mathscr{L}\omega_K)[\phi_t^* g] = 0 \ .$$

Wir wissen noch, dass $(L_X g)_{ij} = X_{i;j} + X_{j;i}$ ist. Nutzt man die Symmetrie von T^{ij} aus, so erhält man damit:

$$\begin{aligned} 0 &= \tfrac{1}{2}\int_K T^{ij}(X_{i;j} + X_{j;i})\,\omega_K = \int_K T^{ij}X_{i;j}\,\omega_K \\ &\overset{\text{P.I.}}{=} \int_K (T^{ij}X_i)_{;j}\,\omega_K - \int_K T^{ij}{}_{;j}X_i\,\omega_K \ . \end{aligned}$$

Den ersten Term formt man mit dem Gauß'schen Satz (5) in ein Oberflächenintegral um:

$$\int_K (T^{ij}X_i)_{;j}\,\omega_K = \int_{\partial K} \langle T^{ij}X_i | N\rangle\,\omega_{\partial K} = 0 \ ,$$

da $X|_{\partial K} \equiv 0$ nach Voraussetzung, d. h. der erste Term liefert keinen Beitrag. Da im zweiten Term sowohl X als auch K beliebig gewählt werden dürfen, bekommen wir das gewünschte Ergebnis:

$$T^{ij}{}_{;j} = 0 \ . \tag{23}$$

5. Variationsprinzip für das gekoppelte System

Die kombinierten Feld-Materie-Gleichungen folgen aus dem Variationsprinzip

$$\delta \int_K \left(-\frac{1}{16\pi G_{\mathrm{N}}} R + \mathscr{L}_{\mathrm{M}} \right) \omega_K \overset{!}{=} 0 \ , \tag{24}$$

wobei nach der Metrik variiert wird. Aus den letzten beiden Abschnitten wissen wir schon:

$$\delta \int_K R\,\omega_K = -\int_K G^{ij}\delta g_{ij}\,\omega_K$$

und

$$\delta \int_K \mathscr{L}_{\mathrm{M}}\,\omega_K = -\tfrac{1}{2}\int_K T^{ij}\delta g_{ij}\,\omega_K \ .$$

Setzt man dies in (24) ein, ergeben sich die Einstein'schen Gleichungen:

$$G^{ij} = 8\pi G_{\mathrm{N}} T^{ij} \ . \tag{25}$$

Literatur

[Dra03] N. Dragon. Geometrie der Relativitätstheorie, 2003. Online erhältlich unter `http://www.itp.uni-hannover.de/~dragon`.

[Jac99] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 3 edition, 1999.

[Str84] N. Straumann. *General Relativity and Relativistic Astrophysics*. Springer, Berlin, 1984.

[SU75] R. U. Sexl and H. K. Urbantke. *Gravitation und Kosmologie*. BI Wissenschaftsverlag, Zürich, 1975.

[Wal84] R. M. Wald. *General Relativity*. The University of Chicago Press, Chicago, 1984.