

# Die LSZ-Reduktionsformel

Florian Jung

Fachbereich Physik, Universität Mainz

Vortrag in der Vorlesung

„Quantenfeldtheorie mit exakten Renormierungsgruppen-Gleichungen“

1. August 2003

**Zusammenfassung.** Im ersten Teil des Vortrags werden Grundlagen der Streutheorie und das freie neutrale Klein-Gordon-Feld diskutiert. Bei der Untersuchung des asymptotischen Verhaltens des wechselwirkenden Feldoperators tritt der Begriff der schwachen Operatorkonvergenz und die daraus resultierende Asymptotenbedingung für den Feldoperator auf. Im zweiten Teil leiten wir die Lehmann-Symanzik-Zimmermann-Reduktionsformel für ein neutrales Klein-Gordon-Skalarfeld her, die einen Zusammenhang zwischen  $S$ -Matrix-Element und den  $n$ -Punkt-Funktionen herstellt.

## 1. Streutheorie und Asymptotenbedingung

In der störungstheoretischen Streutheorie untersucht man Übergänge zwischen *asymptotisch stabilen* Zuständen, d. h. der sogenannte in-Zustand wird lange vor der eigentlichen Wechselwirkung präpariert, wogegen der out-Zustand erst lange nach der Wechselwirkung gemessen wird. Wir wollen annehmen, dass es sich bei diesen asymptotischen Zuständen um *freie*, also nicht wechselwirkende Ein- oder Mehrteilchen-Zustände handelt, für die man einen Fockraum konstruieren kann. Der Einfachheit halber wollen wir hier nur ein einzelnes neutrales Klein-Gordon-Skalarfeld betrachten, die Überlegungen zur Reduktionsformel lassen sich aber ohne weiteres auf kompliziertere Situationen verallgemeinern.

Die Lagrangedichte des *freien Klein-Gordon-Felds*  $\phi$  ist:

$$\mathcal{L}_{\text{KG}} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2 . \quad (1)$$

Mit den Euler-Lagrange-Gleichungen folgt daraus die *freie Klein-Gordon-Gleichung*

$$(\square + m^2)\phi = 0 . \quad (2)$$

Das kanonisch konjugierte Feld ergibt sich zu:

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{KG}}}{\partial \dot{\phi}(x)} = \dot{\phi}(x) . \quad (3)$$

Da es sich um Bosonen handelt (Spin 0) fordern wir zur Quantisierung des Feldes die *gleichzeitigen Kommutationsrelationen* für die Heisenberg-Feldoperatoren:

$$\begin{aligned} [\hat{\phi}(t, \mathbf{x}), \hat{\pi}(t, \mathbf{y})] &= i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) , \\ [\hat{\phi}(t, \mathbf{x}), \hat{\phi}(t, \mathbf{y})] &= 0 = [\hat{\pi}(t, \mathbf{x}), \hat{\pi}(t, \mathbf{y})] . \end{aligned} \quad (4)$$

Um die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren der Theorie zu erhalten, entwickeln wir  $\hat{\phi}$  nach einer Basis von ebenen Wellen

$$u_{\mathbf{p}}(x) = \mathcal{N}_{\mathbf{p}} e^{-ip \cdot x} , \quad (5)$$

die die freie Klein-Gordon-Gleichung (2) lösen. Das Lorentz-kovariante *Skalarprodukt* zweier Klein-Gordon-Wellenfunktionen definiert man als

$$(\phi_1, \phi_2) := i \int d^3x \phi_1 \vec{\partial}_{x^0} \phi_2 \quad (6)$$

mit der schiefsymmetrischen Ableitung

$$\phi_1 \vec{\partial}_{x^\mu} \phi_2 = \phi_1 \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial x^\mu} \right) - \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial x^\mu} \right) \phi_2 . \quad (7)$$

Bei geeigneter Wahl der Normierungskonstanten  $\mathcal{N}_p$  gelten für die  $u_p$  die Orthogonalitätsrelationen

$$(u_p, u_q) = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) , \quad (u_p^*, u_q^*) = -\delta(\mathbf{p} - \mathbf{q}) . \quad (8)$$

Die Entwicklung des freien Feldoperators lautet dann:

$$\hat{\phi}(x) = \int d^3p u_p(x) \hat{a}_p + u_p^*(x) \hat{a}_p^\dagger . \quad (9)$$

Mit dem eben definierten Skalarprodukt ergeben sich daraus für die Erzeuger und Vernichter die Beziehungen

$$\hat{a}_p = (u_p, \hat{\phi}) , \quad \hat{a}_p^\dagger = -(u_p^*, \hat{\phi}) , \quad (10)$$

wie man unter Verwendung von (8) durch einfaches Nachrechnen bestätigt. Aus diesen Gleichungen kann man ablesen, dass die  $\hat{a}_p$  und  $\hat{a}_p^\dagger$  zeitunabhängig sind, wenn  $\hat{\phi}$  die freie Klein-Gordon-Gleichung erfüllt. Postuliert man jetzt die Existenz eines Vakuumzustands  $|0\rangle$ , der die Bedingung  $\hat{a}_p|0\rangle = 0$  für alle  $p$  erfüllt, so lässt sich ein freier  $n$ -Teilchen-Zustand mit den Erzeugern schreiben als

$$|p_1, \dots, p_n\rangle = \hat{a}_{p_1}^\dagger \cdots \hat{a}_{p_n}^\dagger |0\rangle . \quad (11)$$

Wie anfangs erwähnt, soll es sich bei den in- und out-Zuständen um freie Zustände handeln. Die asymptotischen Quantenfelder beschreiben wir durch die Feldoperatoren  $\phi_{\text{in}}$  (für  $x^0 \rightarrow -\infty$ ) bzw.  $\phi_{\text{out}}$  (für  $x^0 \rightarrow +\infty$ ). Setzen wir noch voraus, dass der Vakuumzustand stabil und eindeutig ist, also  $|0; \text{in}\rangle = |0; \text{out}\rangle =: |0\rangle$  gilt, so lässt sich ein  $n$ -Teilchen-in-Zustand in den Erzeugern ausdrücken:

$$|p_1, \dots, p_n; \text{in}\rangle = \hat{a}_{p_1, \text{in}}^\dagger \cdots \hat{a}_{p_n, \text{in}}^\dagger |0\rangle . \quad (12)$$

Analoges gilt für den  $m$ -Teilchen-out-Zustand:

$$|q_1, \dots, q_m; \text{out}\rangle = \hat{a}_{q_1, \text{out}}^\dagger \cdots \hat{a}_{q_m, \text{out}}^\dagger |0\rangle . \quad (13)$$

In der Streutheorie interessiert uns die Wahrscheinlichkeit eines Übergangs zwischen in- und out-Zustand. Wir brauchen also die Übergangsamplitude

$$S_{fi} = \langle q_1, \dots, q_m; \text{out} | p_1, \dots, p_n; \text{in} \rangle , \quad (14)$$

die auch  $S$ -Matrix-Element genannt wird, da sie sich als Erwartungswert eines  $\hat{S}$ -Operators schreiben lässt, der die in- und out-Zustände ineinander transformiert:

$$\phi_{\text{out}}(x) = \hat{S}^{-1} \phi_{\text{in}}(x) \hat{S} . \quad (15)$$

Die Unitarität der  $S$ -Matrix, welche ja eine Observable darstellt, gewährleistet man durch die Forderung nach *asymptotischer Vollständigkeit*, wonach die in- und out-Hilberträume untereinander und auch gleich dem Hilbertraum der wechselwirkenden Theorie sein sollen. Für eine weitere Diskussion der  $S$ -Matrix sei auf die Literatur verwiesen.

Um das  $S$ -Matrix-Element wirklich zu berechnen brauchen wir Kenntnisse über den wechselwirkenden Feldoperator  $\phi$ , welcher auch als *interpolierendes Feld* bezeichnet wird. Auch für diesen postuliert man die Gültigkeit der gleichzeitigen Kommutationsrelationen:

$$\begin{aligned} [\phi(t, \mathbf{x}), \dot{\phi}(t, \mathbf{y})] &= i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) , \\ [\phi(t, \mathbf{x}), \phi(t, \mathbf{y})] &= 0 = [\dot{\phi}(t, \mathbf{x}), \dot{\phi}(t, \mathbf{y})] . \end{aligned} \quad (16)$$

Wegen der asymptotischen Vollständigkeit können wir auch  $\phi$  nach der Basis ebener Wellen  $u_p$  entwickeln und bekommen Erzeuger und Vernichter, die aber jetzt zeitabhängig sind und keine einfache Teilcheninterpretation mehr zulassen.

Im Folgenden interessieren wir uns für das asymptotische Verhalten von  $\phi$ . Ist die Wechselwirkung zeitlich auf ein Intervall der Länge  $T$  beschränkt, so erhält man natürlich

$$\lim_{x^0 \rightarrow \mp\infty} \phi(x) = \phi_{\text{in/out}}(x) . \quad (17)$$

Da sich die Selbstwechselwirkung prinzipiell nicht ausschalten lässt, kann man diese Forderung nicht erfüllen. In einem ersten Schritt fordern wir statt der Gleichheit nur noch Proportionalität:

$$\lim_{x^0 \rightarrow \mp\infty} \phi(x) = \sqrt{Z} \phi_{\text{in/out}}(x) \quad (18)$$

mit einer noch näher zu bestimmenden Renormierungskonstante  $Z$ . Da wir auch für das wechselwirkende Feld die gleichzeitigen Kommutationsrelationen forderten, gilt aber:

$$\begin{aligned} i\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) &= \lim_{x^0 \rightarrow +\infty} [\phi(x^0, \mathbf{x}), \dot{\phi}(x^0, \mathbf{y})] \\ &= Z [\phi_{\text{out}}(x^0, \mathbf{x}), \dot{\phi}_{\text{out}}(x^0, \mathbf{y})] = Zi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) , \end{aligned} \quad (19)$$

woraus direkt  $Z = 1$  folgt und wir wären wieder bei (17), was wir ja gerade vermeiden wollten.

Einen Ausweg aus dieser Misere bildet die *schwache Operatorkonvergenz*. Dazu betrachten wir eine Folge von Operatoren  $(O_i)_i$ . Für die *starke* Konvergenz von  $O_i$  gegen  $O$  fordert man

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|(O_i - O)|\psi\rangle\| = 0 \quad \forall |\psi\rangle \in \mathcal{H} . \quad (20)$$

Die *schwache* Konvergenz ist dagegen definiert als

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \langle \psi | O_i | \chi \rangle = \langle \psi | O | \chi \rangle \quad \forall |\psi\rangle, |\chi\rangle \in \mathcal{H} , \quad (21)$$

hierbei müssen also nur die Matrixelemente konvergieren. Physikalisch gesehen reicht dies vollkommen aus, da ja die Matrixelemente – und nicht die Operatoren selbst – den observablen Größen entsprechen. Den Zusammenhang zwischen starker und schwacher Konvergenz erkennt man, wenn man die Norm in (20) ausschreibt und einen vollständigen Satz Basiszustände  $|\chi_j\rangle$  einschiebt:

$$\begin{aligned} \|(O_i - O)|\psi\rangle\|^2 &= \langle \psi | (O_i - O)^\dagger (O_i - O) | \psi \rangle \\ &= \sum_j \langle \psi | (O_i - O)^\dagger | \chi_j \rangle \langle \chi_j | (O_i - O) | \psi \rangle \\ &= \sum_j |\langle \psi | (O_i - O) | \chi_j \rangle|^2 . \end{aligned} \quad (22)$$

Starke Konvergenz bedeutet nun, dass die Summe gegen Null geht. Da die einzelnen Summanden nicht negativ sind, müssen dann schon die Summanden gegen Null gehen, d. h. aus starker Konvergenz folgt schwache Konvergenz. Da wir es hier mit

einer unendlichen Reihe zu tun haben, gilt die Umkehrung nur, wenn gleichmäßige Konvergenz vorliegt, was im allgemeinen nicht der Fall sein wird. Für endlichdimensionale Hilberträume sind beider Arten der Konvergenz äquivalent.

Wir interpretieren also die ursprüngliche Bedingung (18) im Rahmen der schwachen Konvergenz und erhalten die *Asymptotenbedingung für den Feldoperator*:

$$\lim_{x^0 \rightarrow \mp\infty} \langle \psi | \phi(x) | \chi \rangle = \sqrt{Z} \langle \psi | \phi_{\text{in/out}}(x) | \chi \rangle . \quad (23)$$

Durch diesen „Trick“ wird das Problem in Gleichung (19) entschärft, da für schwache Konvergenz aus  $A_i \rightarrow A$  und  $B_i \rightarrow B$  *nicht* die Konvergenz des Produkts  $A_i B_i \rightarrow AB$  folgt, da man für die Produktbildung die absolute Konvergenz der Reihen braucht.

## 2. Die Reduktionsformel

Wir haben nun alle Mittel zusammen um die LSZ-Reduktionsformel für das  $S$ -Matrix-Element herzuleiten. Diese, von Lehmann, Symanzik und Zimmermann im Jahr 1955 formulierte Gleichung stellt einen Zusammenhang zwischen  $S$ -Matrix und den  $n$ -Punkt-Funktionen (oder Green'schen Funktionen) her. Diese sind definiert als zeitgeordneter Vakuumerwartungswert von Produkten aus Feldoperatoren:

$$G_n(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | T(\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)) | 0 \rangle . \quad (24)$$

Mit der Asymptotenbedingung (23) kennen wir schon einen Zusammenhang zwischen den asymptotischen Feldern, die im  $S$ -Matrix-Element auftreten, und dem interpolierenden Feld, das in den  $n$ -Punkt-Funktionen verwendet wird. Das Matrix-Element war definiert als

$$S_{fi} = \langle q_1, \dots, q_m; \text{out} | p_1, \dots, p_n; \text{in} \rangle . \quad (25)$$

Die folgende Rechnung kann man grob in drei Schritte teilen: Im ersten Schritt wird aus dem in-Zustand ein Erzeugungsoperator  $\hat{a}_{\mathbf{p}, \text{in}}^\dagger$  herausgezogen. Diesen drückt man im zweiten Schritt durch die asymptotischen Feldoperatoren  $\phi_{\text{in}}$  und  $\phi_{\text{out}}$  aus. Im dritten Schritt verwendet man die Asymptotenbedingung um zum wechselwirkenden Feldoperator  $\phi$  überzugehen. Die Prozedur wiederholt man für alle Teilchen des in-Zustands und danach für die des out-Zustands, bis nur noch der Vakuumzustand übrigbleibt um daraus die Reduktionsformel zu erhalten.

Wir ziehen also als erstes einen Erzeuger aus dem in-Zustand heraus:

$$\begin{aligned} S_{fi} &= \langle q_1, \dots, q_m; \text{out} | \hat{a}_{\mathbf{p}_1, \text{in}}^\dagger | p_2, \dots, p_n; \text{in} \rangle \\ &= \langle q_1, \dots, q_m; \text{out} | \hat{a}_{\mathbf{p}_1, \text{out}}^\dagger | p_2, \dots, p_n; \text{in} \rangle \\ &\quad + \langle q_1, \dots, q_m; \text{out} | \hat{a}_{\mathbf{p}_1, \text{in}}^\dagger - \hat{a}_{\mathbf{p}_1, \text{out}}^\dagger | p_2, \dots, p_n; \text{in} \rangle , \end{aligned} \quad (26)$$

wobei im zweiten Schritt die Beziehung  $\hat{a}_{\mathbf{p}, \text{in}}^\dagger = \hat{a}_{\mathbf{p}, \text{out}}^\dagger + \hat{a}_{\mathbf{p}, \text{in}}^\dagger - \hat{a}_{\mathbf{p}, \text{out}}^\dagger$  verwendet wurde. Im ersten Term wirkt  $\hat{a}_{\mathbf{p}_1, \text{out}}^\dagger$  als Vernichter auf den out-Zustand. Wir fordern nun, dass alle  $\mathbf{p}_j$  und  $\mathbf{q}_k$  verschieden sind. Dies stellt physikalisch keine Einschränkung dar, da die Gleichheit dem trivialen Fall entsprechen würde, dass ein Teilchen einfach durch die Wechselwirkungszone hindurchläuft und gar nicht an der Streuung teilnimmt. Man braucht dann nur das  $S$ -Matrix-Element für die übrigen Teilchen ausrechnen, die die obige Bedingung erfüllen. Somit verschwindet der erste Term in (26) und es bleibt der zweite zu untersuchen. Dazu verwenden wir die Darstellungen der Erzeuger aus Gleichung (10). Man erhält:

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\mathbf{p}_1, \text{in}}^\dagger - \hat{a}_{\mathbf{p}_1, \text{out}}^\dagger &= -\{(u_{\mathbf{p}_1}^*, \phi_{\text{in}}) - (u_{\mathbf{p}_1}^*, \phi_{\text{out}})\} \\ &= -i \int d^3x u_{\mathbf{p}_1}(x) \vec{\partial}_{x^0} \{\phi_{\text{in}}(x) - \phi_{\text{out}}(x)\} . \end{aligned} \quad (27)$$

Diese Gleichung gilt für alle  $x^0$ , da die linke Seite unabhängig von  $x^0$  ist, also können wir  $x^0$  auf der rechten Seite frei wählen:

$$\hat{a}_{\mathbf{p}_1, \text{in}}^\dagger - \hat{a}_{\mathbf{p}_1, \text{out}}^\dagger = -i \int d^3x \left\{ \left[ \lim_{x^0 \rightarrow -\infty} u_{\mathbf{p}_1} \vec{\partial}_{x^0} \phi_{\text{in}} \right] - \left[ \lim_{x^0 \rightarrow +\infty} u_{\mathbf{p}_1} \vec{\partial}_{x^0} \phi_{\text{out}} \right] \right\}. \quad (28)$$

Da der ganze Ausdruck in einem Skalarprodukt steht, können wir an dieser Stelle die Asymptotenbedingung verwenden um zum interpolierenden Feld überzugehen:

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\mathbf{p}_1, \text{in}}^\dagger - \hat{a}_{\mathbf{p}_1, \text{out}}^\dagger &= -\frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^3x \left\{ \left[ \lim_{x^0 \rightarrow -\infty} u_{\mathbf{p}_1} \vec{\partial}_{x^0} \phi \right] - \left[ \lim_{x^0 \rightarrow +\infty} u_{\mathbf{p}_1} \vec{\partial}_{x^0} \phi \right] \right\} \\ &= +\frac{i}{\sqrt{Z}} \left( \lim_{x^0 \rightarrow +\infty} - \lim_{x^0 \rightarrow -\infty} \right) \int d^3x u_{\mathbf{p}_1} \vec{\partial}_{x^0} \phi. \end{aligned} \quad (29)$$

Mit Hilfe von

$$\left( \lim_{x^0 \rightarrow +\infty} - \lim_{x^0 \rightarrow -\infty} \right) F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx^0 \partial_{x^0} F(x) \quad (30)$$

kann man dies in ein vierdimensionales Integral umformen und erhält:

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\mathbf{p}_1, \text{in}}^\dagger - \hat{a}_{\mathbf{p}_1, \text{out}}^\dagger &= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x \partial_{x^0} (u_{\mathbf{p}_1} \vec{\partial}_{x^0} \phi) \\ &= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x \{ u_{\mathbf{p}_1} (\partial_{x^0}^2 \phi) - (\partial_{x^0}^2 u_{\mathbf{p}_1}) \phi \}. \end{aligned} \quad (31)$$

Für die ebenen Wellen  $u_{\mathbf{p}}$  gilt die freie Klein-Gordon-Gleichung

$$(\square + m^2)u_{\mathbf{p}} = 0. \quad (32)$$

Mit  $\square = \partial_\mu \partial^\mu = \partial_{x^0}^2 - \nabla^2$  ist dies äquivalent zu

$$\partial_{x^0}^2 u_{\mathbf{p}} = (\nabla^2 - m^2)u_{\mathbf{p}}. \quad (33)$$

Wir setzen die Beziehung in (31) ein und integrieren danach zweimal partiell über die Raumkoordinaten. Die Randterme verschwinden, da man sich (31) als Integral-kern vorstellen muss, den man mit Wellenpaketen testet, also keine Beiträge im Unendlichen liefern. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \hat{a}_{\mathbf{p}_1, \text{in}}^\dagger - \hat{a}_{\mathbf{p}_1, \text{out}}^\dagger &= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x \{ u_{\mathbf{p}_1} \partial_{x^0}^2 \phi - (\nabla^2 - m^2)u_{\mathbf{p}_1} \phi \} \\ &\stackrel{\text{P.I.}}{=} \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x \{ u_{\mathbf{p}_1} \partial_{x^0}^2 \phi - u_{\mathbf{p}_1} (\nabla^2 - m^2) \phi \} \\ &= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x u_{\mathbf{p}_1} (\square_x + m^2) \phi. \end{aligned} \quad (34)$$

Für das  $S$ -Matrix-Element aus (26) haben wir damit:

$$S_{fi} = \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4x u_{\mathbf{p}_1}(x) (\square_x + m^2) \langle q_1, \dots, q_m; \text{out} | \phi(x) | p_2, \dots, p_n; \text{in} \rangle, \quad (35)$$

es ist uns also gelungen das erste Teilchen aus dem Anfangszustand zu eliminieren.

Wir ziehen nun das zweite Teilchen heraus:

$$\begin{aligned} &\langle q_1, \dots, q_m; \text{out} | \phi(x) | p_2, \dots, p_n; \text{in} \rangle \\ &= \langle q_1, \dots, q_m; \text{out} | \phi(x) \hat{a}_{\mathbf{p}_2, \text{in}}^\dagger | p_3, \dots, p_n; \text{in} \rangle. \end{aligned} \quad (36)$$

Zur Berechnung dieses Terms brauchen wir:

$$\begin{aligned}
\phi(x)\hat{a}_{\mathbf{p}_2,\text{in}}^\dagger &= -\phi(x)i \int d^3y u_{\mathbf{p}_2}(y)\vec{\partial}_{y^0}\phi_{\text{in}}(y) \\
&= -\phi(x) \lim_{y^0 \rightarrow -\infty} \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^3y u_{\mathbf{p}_2}\vec{\partial}_{y^0}\phi(y) \\
&= -\frac{i}{\sqrt{Z}} \lim_{y^0 \rightarrow -\infty} \int d^3y u_{\mathbf{p}_2}\vec{\partial}_{y^0}(\phi(x)\phi(y)) . \tag{37}
\end{aligned}$$

Wegen  $y^0 \rightarrow -\infty$  dürfen wir hier die Zeitordnung einführen ohne am Wert des Integrals etwas zu verändern:

$$\phi(x)\hat{a}_{\mathbf{p}_2,\text{in}}^\dagger = -\frac{i}{\sqrt{Z}} \lim_{y^0 \rightarrow -\infty} \int d^3y u_{\mathbf{p}_2}\vec{\partial}_{y^0}T(\phi(x)\phi(y)) . \tag{38}$$

Wir verwenden nun

$$-\lim_{y^0 \rightarrow -\infty} = \left( \lim_{y^0 \rightarrow +\infty} - \lim_{y^0 \rightarrow -\infty} \right) - \lim_{y^0 \rightarrow +\infty} \tag{39}$$

und aus (38) wird

$$\begin{aligned}
\phi(x)\hat{a}_{\mathbf{p}_2,\text{in}}^\dagger &= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4y \partial_{y^0} \{ u_{\mathbf{p}_2}\vec{\partial}_{y^0}T(\phi(x)\phi(y)) \} \\
&\quad - \frac{1}{\sqrt{Z}} \lim_{y^0 \rightarrow +\infty} i \int d^3y u_{\mathbf{p}_2}\vec{\partial}_{y^0}(\phi(y)\phi(x)) . \tag{40}
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir den ersten Term schon wie oben mittels (30) in ein vierdimensionales Integral umgewandelt und im zweiten Term den Zeitordnungsoperator angewendet, der dort die Operatoren  $\phi(x)$  und  $\phi(y)$  vertauscht hat. Der zweite Term ist unter Verwendung der Asymptotenbedingung aber gerade

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{\sqrt{Z}} \lim_{y^0 \rightarrow +\infty} i \int d^3y u_{\mathbf{p}_2}\vec{\partial}_{y^0}(\phi(y)\phi(x)) &= -i \int d^3y u_{\mathbf{p}_2}\vec{\partial}_{y^0}\phi_{\text{out}}(y)\phi(x) \\
&= \hat{a}_{\mathbf{p}_2,\text{out}}^\dagger \phi(x) , \tag{41}
\end{aligned}$$

wobei  $\hat{a}_{\mathbf{p}_2,\text{out}}^\dagger$  jetzt links steht, also auf den out-Zustand wirken kann. Wegen unserer Forderung  $\mathbf{p}_j \neq \mathbf{q}_k$  für alle  $j, k$  verschwindet also der zweite Term von (40) im Skalarprodukt. Den Rest kann man wieder nach der gleichen Methode wie in (34) umformen:

$$\begin{aligned}
\phi(x)\hat{a}_{\mathbf{p}_2,\text{in}}^\dagger &= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4y \{ u_{\mathbf{p}_2}\partial_{y^0}^2 T(\phi(x)\phi(y)) - \partial_{y^0}^2 u_{\mathbf{p}_2} T(\phi(x)\phi(y)) \} \\
&= \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4y \{ u_{\mathbf{p}_2}\partial_{y^0}^2 T(\phi(x)\phi(y)) - (\nabla_y^2 - m^2)u_{\mathbf{p}_2} T(\phi(x)\phi(y)) \} \\
&\stackrel{\text{P.I.}}{=} \frac{i}{\sqrt{Z}} \int d^4y u_{\mathbf{p}_2}(\square_y + m^2)T(\phi(x)\phi(y)) . \tag{42}
\end{aligned}$$

Damit haben wir auch das zweite Teilchen aus dem Anfangszustand eliminiert und es gilt:

$$\begin{aligned}
S_{fi} &= \left( \frac{i}{\sqrt{Z}} \right)^2 \int d^4x_1 \int d^4x_2 u_{\mathbf{p}_1}(x_1)u_{\mathbf{p}_2}(x_2)(\square_{x_1} + m^2)(\square_{x_2} + m^2) \\
&\quad \times \langle q_1, \dots, q_m; \text{out} | T(\phi(x_1)\phi(x_2)) | p_3, \dots, p_n; \text{in} \rangle . \tag{43}
\end{aligned}$$

Nach  $n$  Schritten hat man alle Teilchen aus dem in-Zustand eliminiert. Auf die gleiche Methode kann man nun die  $q_k$  aus dem out-Zustand entfernen und nach

insgesamt  $n + m$  Schritten erhält man die LSZ-Reduktionsformel:

$$\begin{aligned}
 S_{fi} &= \left( \frac{i}{\sqrt{Z}} \right)^{n+m} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n d^4y_1 \cdots d^4y_m \\
 &\quad \times u_{\mathbf{p}_1}(x_1) \cdots u_{\mathbf{p}_n}(x_n) u_{\mathbf{q}_1}^*(y_1) \cdots u_{\mathbf{q}_m}^*(y_m) \\
 &\quad \times (\square_{x_1} + m^2) \cdots (\square_{x_n} + m^2) (\square_{y_1} + m^2) \cdots (\square_{y_m} + m^2) \\
 &\quad \times G_{n+m}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) . \tag{44}
 \end{aligned}$$

An dieser Form des  $S$ -Matrix-Elements sieht man sehr schön, dass in- und out-Felder gleichberechtigt vorkommen. Die Zuordnung zu einlaufenden und auslaufenden Teilchen geschieht erst durch Anwenden des Klein-Gordon-Operators und Projektion auf die zugehörigen ebenen Wellen.

### Literatur

- [GR93] W. Greiner und J. Reinhardt. *Feldquantisierung*. Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 1993.
- [IZ80] C. Itzykson und J.-B. Zuber. *Quantum Field Theory*. McGraw-Hill, New York, 1980.
- [Ryd96] L. H. Ryder. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 2. Auflage, 1996.
- [Sch01] F. Scheck. *Theoretische Physik 4: Quantisierte Felder*. Springer, Berlin, 2001.